

III. Fonctions polynômes de degré 3

1. Vocabulaire

Définition :

On appelle **fonction polynôme de degré 3** toute fonction f définie sur \mathbb{R} par :
 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c et d sont des nombres réels avec $a \neq 0$.

Exemple : $f(x) = -9x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x - 6$ est une fonction polynôme du second degré avec $a = -9$, $b = \frac{3}{2}$, $c = 4$ et $d = -6$.

2. Résoudre une équation de la forme $x^3 = c$ ($c > 0$)

Propriété :

On considère un réel c positif.

L'équation $x^3 = c$ admet une unique solution qui s'écrit : $x = c^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{c}$.

Exemple : $x^3 = 20$ admet pour solution unique $x = 20^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{20}$. $x \approx 2,72$ à 10^{-2} près.

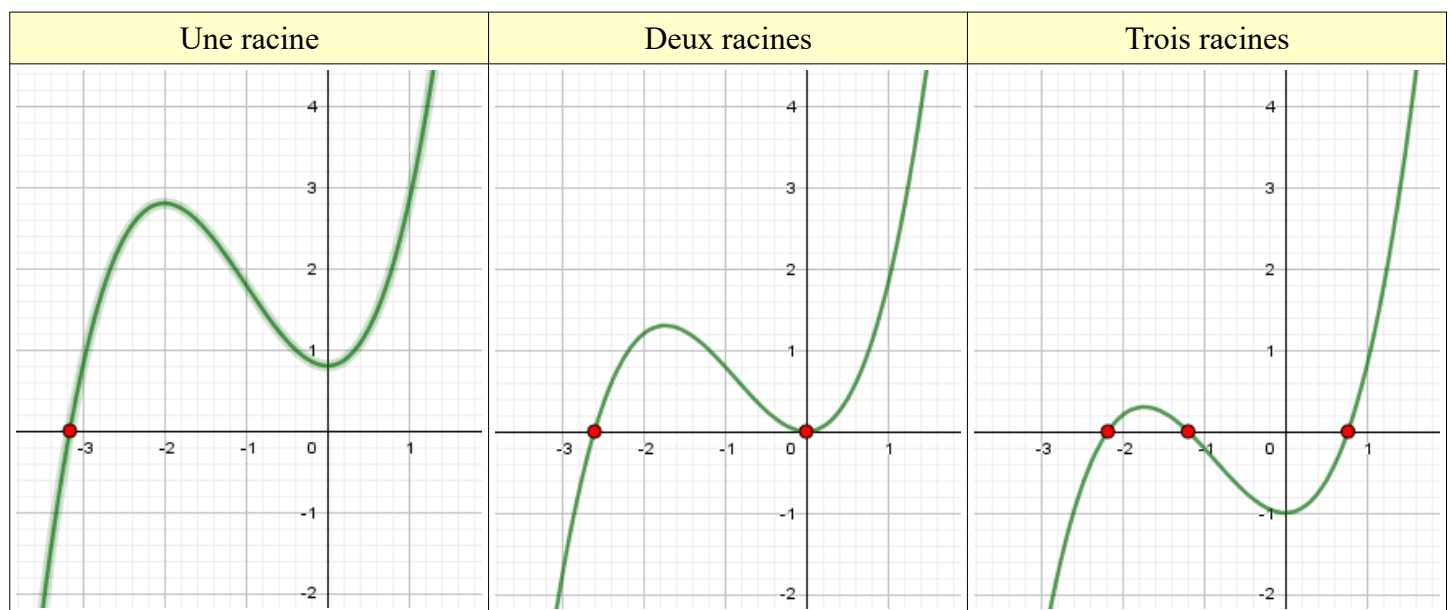
Rappel : Pour tout nombre réel $c > 0$, l'équation $x^2 = c$ admet deux solutions : $x = \sqrt{c}$ et $x = -\sqrt{c}$.

3. Racine(s) d'une fonction de degré 3

Propriété :

Une fonction polynôme degré trois admet soit :

- une racine ;
- deux racines ;
- trois racines.

**Propriété :**

Soit f une fonction polynôme de degré 3 définie sur \mathbb{R} par sa forme développée :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0).$$

f admet **trois racines distinctes** x_1, x_2 et x_3 si, et seulement si, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Cette forme de f est appelée la forme factorisée.

Remarque : Les racines de f se lisent graphiquement : ce sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative et de l'axe des abscisses.