Terminale ST2S – S1 - SUITES NUMÉRIQUES

I. Les suites : généralités

1. Vocabulaire

Une suite numérique est une liste infinie de nombres réels. Chaque nombre de cette liste est appelé un terme de la suite. Chaque terme de la suite est repéré par son rang : c'est un nombre entier naturel noté en indice (en bas à droite) du terme.

Exemple : La suite $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou encore (u_n) s'il n'y a pas d'ambiguïté possible.

$n \to u(n) = u_n$

Ainsi, on note par exemple u_9 le neuvième terme (rang 9) de la suite u, commençant par le terme u_1.

Si on définit cette suite (u_n) comme la suite des nombres premiers, on peut écrire que :

$$(u_n) = \{ 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; \dots \}.$$

Le quatrième nombre premier est 7. On note alors $u_4 = 7$.

2. Définir une suite numérique

On peut définir une suite de plusieurs façons :

- **De manière informelle :** c'est-à-dire par un texte décrivant les termes.

  Exemple : la suite des « nombres premiers », ou encore la suite des « nombres pairs ».
- **De façon formelle :** on décrit la suite en langage mathématique. Cette expression permet alors de calculer la valeur de chacun des termes qui composent la suite :
  - Chaque terme peut être définit sous une **forme fonctionnelle**. On peut alors calculer chaque terme en fonction de son rang.

    Exemple : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n^2 - 3\,n + 1$.

    On calcule aisément u_3 ou tout autre terme en remplaçant n par sa valeur. $u_3 = 3^2 - 3 \times 2 + 1 = 2$.
  - On peut aussi définir la suite sous **forme récurrente**. La relation de récurrence relie alors un terme à un terme qui le précède.

    Exemple : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 2\,v_n + 3 \end{cases}$. Pour calculer v_3, il faut d'abord calculer v_2 et v_1 :

    $v_1 = 2 \times v_0 + 3 = 2 \times 1 + 3 = 5$; $v_2 = 2 \times 5 + 3 = 13$; $v_3 = 2 \times 13 + 3 = 29$.

Remarque : une bonne utilisation de la calculatrice est indispensable (voir la fiche calculatrice sur le site http://lagrangeamaths.free.fr).

3. Représenter graphiquement une suite

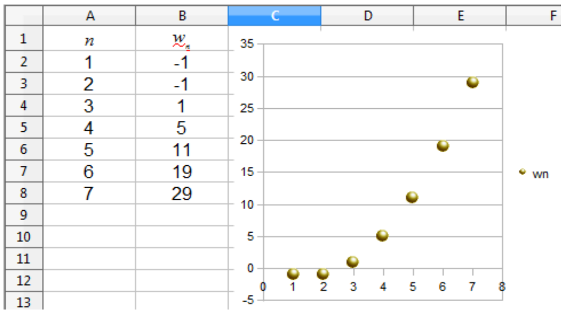
Définition :	Dans un plan P muni d'un repère orthogonal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), la représentation graphique d'une suite est l'ensemble des points $M_n(n,\ u_n)$.

Exemple : La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$w_n = n^2 - 3n + 1.$$

L'utilisation d'une calculatrice ou d'un tableur peut grandement faciliter la réalisation d'un graphique.
Pour cela, il faut :

- définir la suite ;
- réaliser un tableau de valeurs ;
- insérer alors le graphique.



	A	B
1	n	w_n
2	1	-1
3	2	-1
4	3	1
5	4	5
6	5	11
7	6	19
8	7	29

Ici, on a utilisé un tableur (Ooo).

II. Croissance d'une suite

1. Suite croissante

Définition :	Une suite (u_n) est croissante si et seulement si, pour tout entier n, on a $u_{n+1} \geqslant u_n$.

Dans la pratique, on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ en se plaçant dans le cas général.

Exemple : Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 3$.

$u_{n+1} - u_n = ((n+1)^2 - 3) - (n^2 - 3) = (n+1)^2 - 3 - n^2 + 3 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$.
De plus $n \in \mathbb{N}$, donc $n \geqslant 1$ et donc $2n + 1 \geqslant 3 > 0$. C'est-à-dire que $u_{n+1} - u_n > 0$.
La suite (u_n) est donc croissante.

2. Suite décroissante

Définition :	Une suite (u_n) est décroissante si et seulement si, pour tout entier n, on a $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Exemple : Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 5 - 2\mathrm{n}$.

$v_{n+1} - v_n = (5 - 2(n+1)) - (5 - 2n) = 5 - 2n - 2 - 5 + 2n = -2$ et $-2 < 0$. C'est-à-dire $v_{n+1} - v_n < 0$.
La suite (v_n) est donc décroissante.

3. Suite constante

Définition :	Une suite (u_n) est constante si et seulement si, pour tout entier n, on a $u_{n+1} = u_n$.

C'est-à-dire si $u_{n+1} - u_n = 0$.

Remarque : une suite peut être croissante, décroissante ou constante **à partir d'un certain rang**.
Par exemple, la suite (w_n) définie dans le I.3. par $w_n = n^2 - 3n + 1$ est croissante à partir de $n = 3$.

III. Des suites remarquables

1. Suites arithmétiques

Définition :	Une suite (u_n) est appelée une suite **arithmétique** si chaque terme est obtenu à partir du précédent en lui ajoutant un même nombre. C'est-à-dire s'il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = u_n + r.$ La constante r est alors appelée la **raison** de la suite arithmétique (u_n).

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \quad \dots \quad u_n \quad \dots$$

Exemple : la suite (0 ; 2 ; 4 ; 6 ; …) des entiers naturels pairs, de terme général $u_n = 2n$, est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de terme initial $u_0 = 0$. On a alors : $u_{n+1} = u_n + 2$.

Remarque : à cette occasion, on peut observer que certaines suites peuvent être définies des trois manières décrites dans le I. (informelle, forme fonctionnelle et forme récurrente);

- Terme général d'une suite arithmétique

Théorème :	Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, alors pour tout entier naturel n : $u_n = u_0 + nr$. Plus généralement, pour tout entier n et k, on a : $u_n = u_k + (n - k)r$.

Démonstration : $u_n = u_{n-1} + r = u_{n-2} + r + r = \dots = u_0 + \underbrace{r + r + \dots r}_{n \text{ termes } r = nr}$

Donc $u_n = u_0 + nr$

$u_k = u_0 + kr$, donc $u_0 = u_k - kr$; or $u_n = u_0 + nr$ donc $u_n = (u_k - kr) + nr = u_k + (n - k)r$.

On peut donc aisément passer d'une forme à l'autre en faisant toutefois attention au rang du terme initial.

Exemple : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$ équivaut à $u_n = 5 + 4n$.

Si la suite commence à u_1, on a alors $\begin{cases} u_1 = 9 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$ qui équivaut à $u_n = 9 + 4(n-1)$.

- Croissance d'une suite arithmétique

Théorème :	Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, alors pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = r$. D'où : • si $r < 0$, la suite (u_n) est décroissante ; • si r > 0, la suite (u_n) est croissante ; • si $r = 0$, la suite est constante.

> Ex :

2. Suites géométriques

Définition :	Une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$, est appelée une suite **géométrique** si chaque terme est obtenu à partir du précédent en **le multipliant par une constante**. C'est-à-dire s'il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = q \times u_n$. La constante q est alors appelée la **raison** de la suite géométrique (u_n).

$$u_0 \underset{\times q}{\nearrow} u_1 \underset{\times q}{\nearrow} u_2 \underset{\times q}{\nearrow} u_3 \quad \dots \quad u_n \quad \dots$$

Exemple : la suite (1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; …) des entiers naturels, de terme général $u_n = 2^n$, est une suite géométrique de raison $q = 2$: $u_{n+1} = 2u_n$.

Remarque : dans le cas d'une suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ de raison nulle, alors pour tout $n \neq 1$, $u_n = 0$.

- Terme général d'une suite géométrique

Théorème :	Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 0$, alors pour tout entier naturel n : $u_n = u_0 \times q^n$. Plus généralement, pour tout entier n et k, on a : $u_n = u_k \times q^{n-k}$.

Démonstration : $u_n = q \times u_{n-1} = q \times q \times u_{n-2} = \dots = q \times q \times \dots \times q \times u_0$

Donc $u_n = q^n u_0$ n facteurs $q = q^n$

$u_k = q^k u_0$, donc $u_0 = u_k q^{-k}$; or $u_n = q^n u_0$ donc $u_n = q^n u_k q^{-k} = u_k q^{n-k}$.

- Croissance d'une suite géométrique

Théorème :	Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, alors pour tout entier naturel n , on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$. D'où : • si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$, la suite (u_n) est décroissante ; • si $q > 1$ et $u_0 > 0$, la suite (u_n) est croissante ; • si $q = 1$, la suite est constante.

Exemple : Dans un magasin, un article voit son prix augmenter chaque année de 5 %.
Son prix de départ est de 4 000 €.

Le prix annuel est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 4000$ € et de raison $q = 1 + \frac{5}{100} = 1{,}05$.

Le prix initial est positif et la raison est $q = 1{,}05 > 1$ donc la suite est bien croissante.