Terminale ST2S – F1 : FONCTIONS – DÉRIVATION

I. Nombre dérivé et tangente à une courbe

On considère une fonction *f*, définie sur un intervalle *I*, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

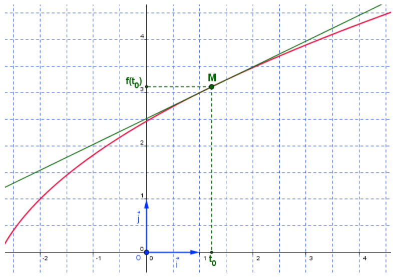
Définition (rappel) :

Si la courbe $\mathcal{C}$ admet en un point M, d'abscisse t_0, une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées, alors le nombre dérivé en t_0 est égal au coefficient directeur *m* de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en M.

Ce nombre dérivé est noté $f'(t_0)$ et $f'(t_0)=m$.

La tangente en M admet alors une équation du type :

$$y=f'(t_0)\times t+p.$$

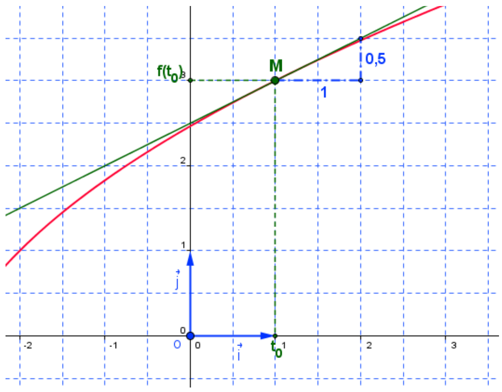


Exemple :

Sur le graphique ci-contre, on peut lire que la tangente à la courbe au point de coordonnées (1 ; 3) admet pour coefficient directeur *m* = 0,5.
Donc ici : $f'(1)=0{,}5$.

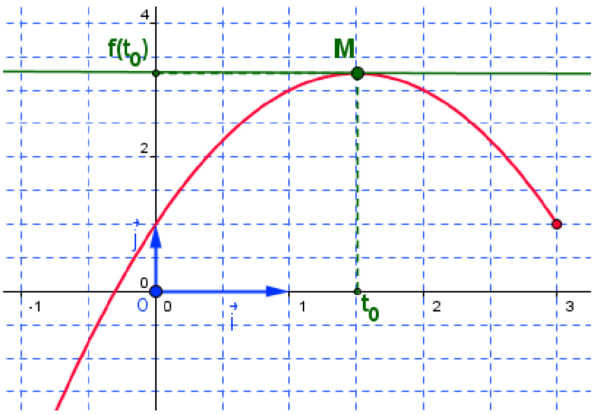
Méthode :
- on part de M et on avance de 1 en abscisses (horizontalement) ;
- puis on se déplace verticalement pour retrouver la droite (ici la tangente) et on lit la valeur du déplacement vertical (ici 0,5).

On peut également lire graphiquement la valeur de l'ordonnée à l'origine *p* de la droite : c'est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.
Ici *p* = 2,5. D'où l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en M : $y=0{,}5\,t+2{,}5$.

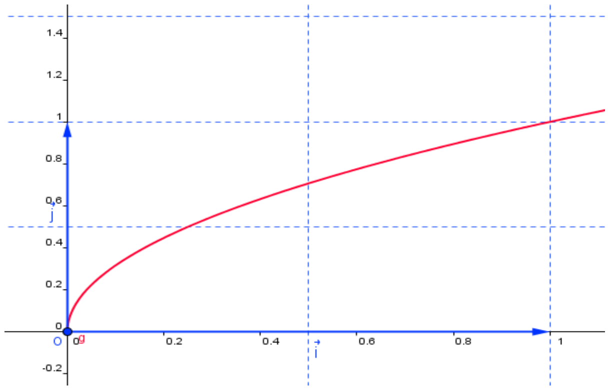


Cas particuliers :

- Si la tangente est parallèle à l'axe des abscisses, alors le coefficient directeur de la tangente est nul : $m=0$.



- Si la tangente se rapproche de la verticale en un point, alors la fonction n'est pas dérivable en ce point.



La fonction racine carrée n'est pas dérivable en zéro.

II. Fonction dérivée

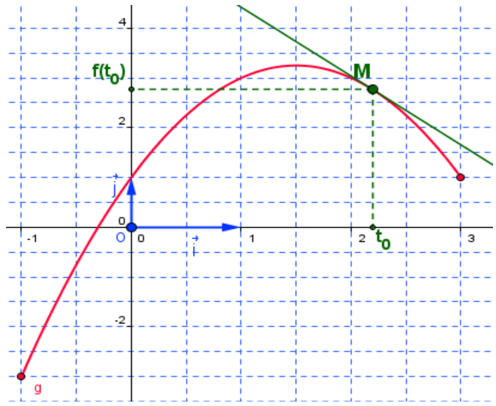
Activité p. :

Définition :	Si une fonction *f* admet un nombre dérivé pour tout réel *t* d'un intervalle *I*, c'est-à-dire que la courbe représentative de *f* dans un repère orthogonal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) admet une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées en tout point, alors on dit que la fonction *f* est dérivable sur *I*.

Exemple : une fonction *g* est représentée par la courbe ci-contre.

Sur l'intervalle [-1 ; 3], en tout point de la courbe on peut tracer une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées.

Donc la fonction *g* est dérivable sur [-1 ; 3].



Définition :	Si une fonction *f* est dérivable sur un intervalle *I*, la fonction qui, à tout nombre *t* de *I*, associe le nombre dérivé *f'(t)* est appelée la fonction dérivée de *f* sur *I* et on la note *f'*.

Exemple : Dans l'activité 2, on a pu mettre en évidence que la fonction *f* définie sur [-5 ; 5] par $f(t)=t^2-3t$ admet pour fonction dérivée la fonction *f'* définie elle aussi sur [-5 ; 5] et par $f'(t)=2t-3$.

Remarques importantes :

- *f'* désigne la **fonction dérivée de *f*** ;
- *f'* n'est pas forcément définie sur le même intervalle que *f* (voir la fonction racine carrée par après) ;
- *f'(t)* désigne le **nombre dérivé de *f* en *t***.

III. Dérivée des fonctions usuelles

1. Les fonctions affines

Ce sont les fonctions de la forme $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$t \mapsto at+b.$$

Théorème :	Les fonctions affines sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et donc sur tout intervalle de $\mathbb{R}$. Si $f(t)=at+b$, alors sa fonction dérivée est définie par $f'(t)=a$.

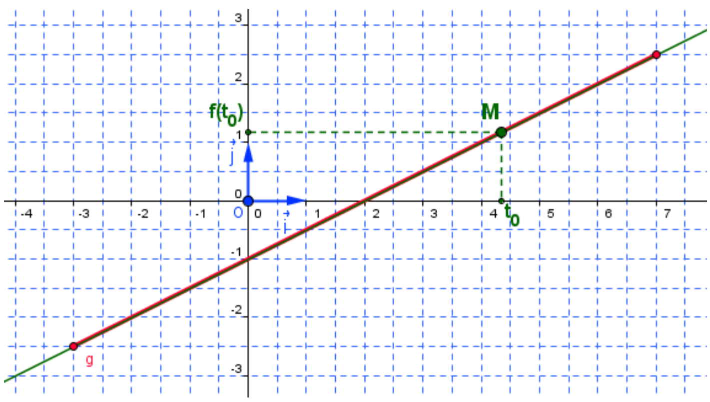
Exemple : Soit *f* la fonction définie sur [-3 ; 7] par :

$$f(t)=0{,}5t-1.$$

La fonction dérivée de *f* est définie aussi sur [-3 ; 7] et

$$f'(t)=0{,}5.$$

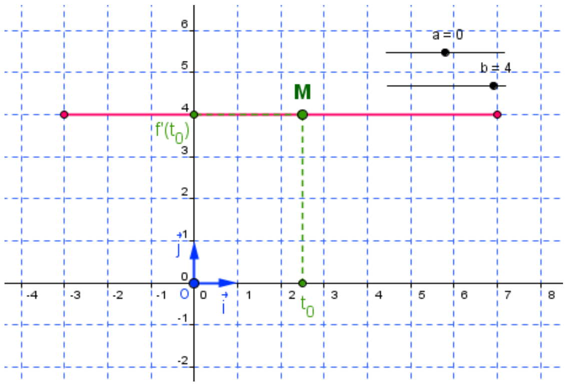
Dans ce cas, la tangente (en vert ci-contre) est superposée avec la courbe (en rouge) représentant la fonction.



2. Cas particuliers

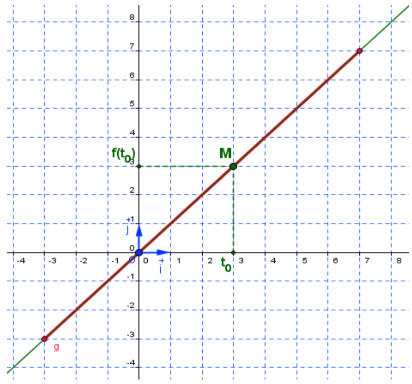
a. Les fonctions constantes

Théorème :	Les fonctions **constantes** sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour $f(t)=b$, $b\in\mathbb{R}$, alors $f'(t)=0$.



b. La fonction identité

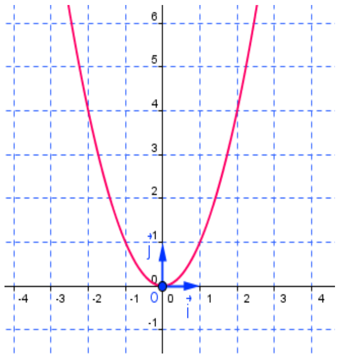
Théorème :	La fonction identité est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour $f(t)=t$, alors $f'(t)=1$.



3. Les fonctions « puissances »

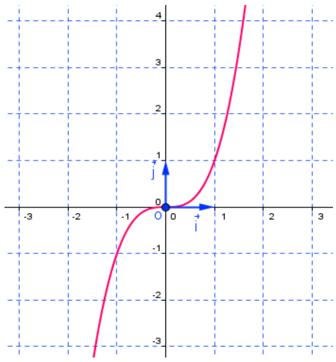
a. La fonction carrée : $t\mapsto t^2$

Théorème :	La fonction **carrée** est dérivable sur $\mathbb{R}$. Si $f(t)=t^2$, alors $f'(t)=2t$.



b. La fonction cube : $t\mapsto t^3$

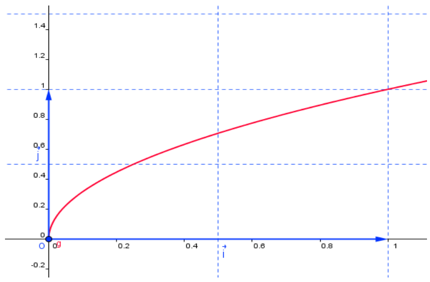
Théorème :	La fonction cube est dérivable sur $\mathbb{R}$. Si $f(t)=t^3$, alors $f'(t)=3t^2$.



4. Les autres fonctions usuelles

a. La fonction racine carrée : $t\mapsto\sqrt{t}$

Théorème :	La fonction **racine carrée** n'est dérivable que sur $]0\,;+\infty[$. Pour $f(t)=\sqrt{t}$, alors $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$.



b. La fonction inverse : $t\mapsto\dfrac{1}{t}$

Théorème :	La fonction inverse n'est dérivable que sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Pour $f(t)=\dfrac{1}{t}$, alors $f'(t)=-\dfrac{1}{t^2}$.